

Logický čtverec

Tradiční logický čtverec

Logický čtverec je schéma, do kterého lze poměrně přehledně znázornit následující vztahy mezi tvrzeními:

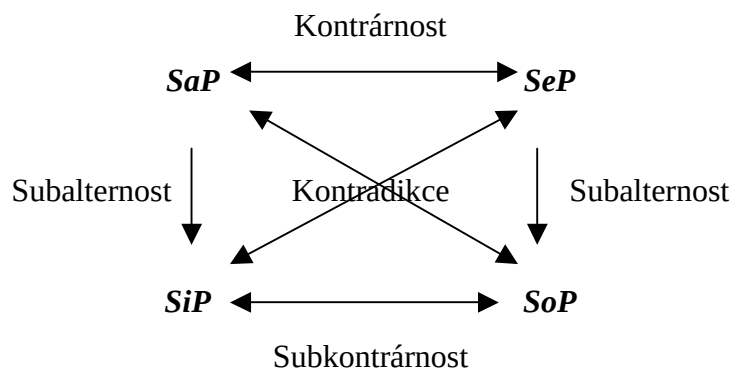
Kontradikce je vztah mezi dvěma tvrzeními s přesně opačnými pravdivostními podmínkami. Je to v podstatě vztah mezi tvrzením a jeho negací. Kontradiktorická tvrzení se navzájem popírají. Právě jedno z nich je pravdivé (a právě jedno nepravdivé).

Kontrárnost je vztah mezi dvěma tvrzeními, z nichž nejvýše jedno může být pravdivé (tedy jedno nebo žádné). Nemohou proto (za žádných okolností) být obě dvě pravdivá, ale mohou být obě dvě nepravdivá, nebo jedno pravdivé a druhé nepravdivé.

Subkontrárnost je vztah mezi dvěma tvrzeními, z nichž alespoň jedno je pravdivé (to znamená jedno nebo obě dvě). V žádném případě tedy nemohou být obě dvě nepravdivá, ale mohou být obě pravdivá nebo jedno pravdivé a druhé nepravdivé.

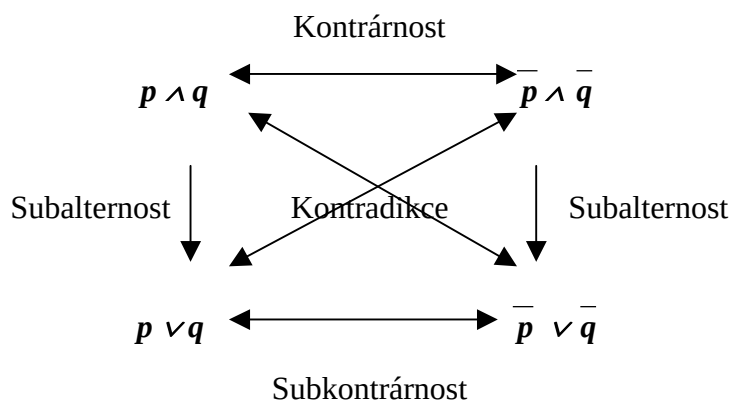
Subalternost je vztah závislosti (podřazenosti) mezi tvrzeními. Tvrzení T2 je subalterní k tvrzení T1, je-li T2 pravdivé vždy, když je pravdivé T1 a obráceně T1 je nepravdivé vždy, kdy je nepravdivé i T2. Obráceně to ale neplatí: je-li T1 nepravdivé, T2 může být pravdivé i nepravdivé, a obráceně: je-li T2 pravdivé, T1 pravdivé být může, ale nemusí.

Toto schéma bylo poprvé použito (a vlastně vytvořeno) pro aristotelské subjekt-predikátové soudy (podrobněji viz kapitola o Aristotelské logice, oddíl o soudech a logickém čtverci).

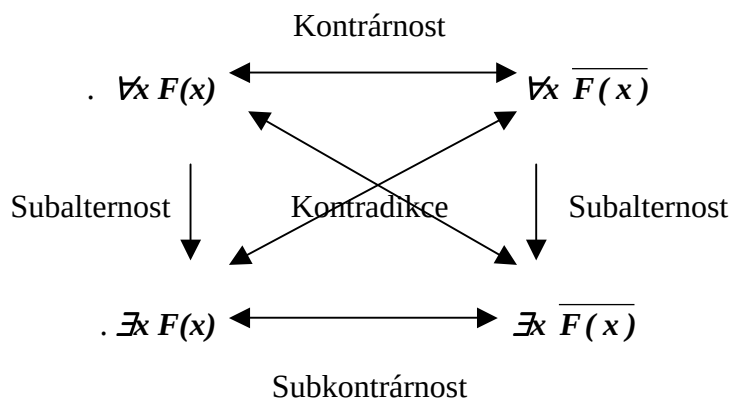


Logický čtverec ve výrokové a predikátové logice

Ty samé vztahy z tradičního logického čtverce, které platí mezi subjekt-predikátovými soudy, však mohou platit například ve výrokové logice mezi tvrzeními:



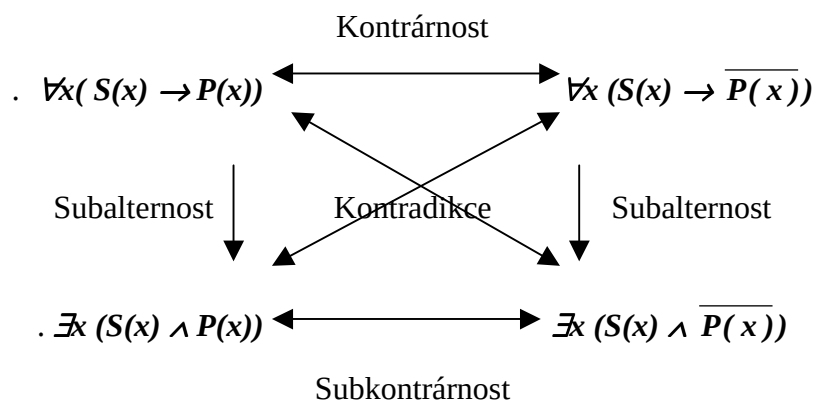
nebo v predikátové logice mezi tvrzeními:



Standartní přepis aristotelských (subjekt-predikátových) soudů do predikátové logiky je následující:

SaP	Každé S je P.	$\forall x (S(x) \rightarrow P(x))$
SeP	Žádné S není P.	$\forall x (S(x) \rightarrow \overline{P(x)})$
SiP	Některé S je P.	$\exists x (S(x) \wedge P(x))$
SoP	Některé S není P.	$\exists x (S(x) \wedge \overline{P(x)})$

Přepis klasického (aristotelského) logického čtverce pro subjekt-predikátové soudy do predikátové logiky proto vypadá takto:



Cvičení

- 1) V predikátové logice platí tzv. DeMorganovy neboli duální zákony pro kvantifikátory:

$$\overline{\exists x F(x)} \equiv \forall x \overline{F(x)}$$

$$\overline{\forall x F(x)} \equiv \exists x \overline{F(x)}$$

Soudy, které jsou v logickém čtverci úhlopříčně jsou navzájem kontradiktorní. To znamená, že jeden je negací druhého. Znegujte tedy některý z přepisů klasického subjekt-predikátového soudu do predikátové logiky a upravte jej podle De Morganových zákonů + tabulky ekvivalencí logických spojek. Pokud jste postupovali správně a neudělali chybu, měl by Vám vyjít soud v protilehlém rohu logického čtverce.

Například: SaP a SoP jsou navzájem kontradiktorní,

Tedy tvrzení $\forall x (S(x) \rightarrow P(x))$ je negací tvrzení $\exists x (S(x) \wedge \overline{P(x)})$.

Vezměme tedy negaci soudu SoP

$$\overline{\exists x (S(x) \wedge \overline{P(x)})}$$

Úpravou podle DeMorganových zákonů dostaneme

$$\forall x \overline{S(x) \wedge \overline{P(x)}}$$

Protože za obecným kvantifikátorem má být (v klasickém logickém čtverci) implikace dostaneme úpravou podle tabulky ekvivalencí logických spojek

$$\forall x (S(x) \rightarrow P(x)),$$

což je obecný kladný soud (SaP).

Vidíme tedy, že SaP je skutečně ekvivalentní s negací SoP.

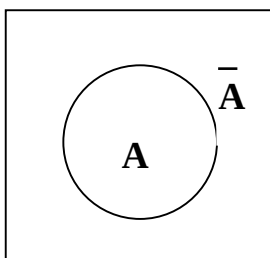
Úplně stejným způsobem postupujte i pro zbývající tři soudy, tj. SaP, SeP a SiP.

Nejprve je znegujte, pak odstraňte negaci nad kvantifikátorem podle DeMorganových zákonů, potom převed'te spojku podle tabulky ekvivalencí logických spojek a poté by vám měl vyjít soud z protilehlého rohu logického čtverce, tj. soud, který je k výchozímu soudu kontradiktorní.

Subjekt-predikátové soudy a logika tříd

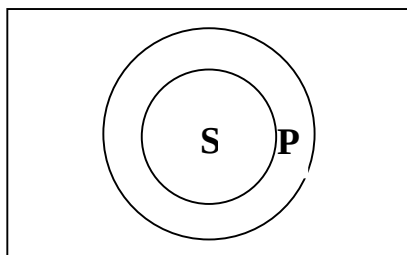
Poměrně přehledné je znázornění subjekt-predikátových soudů z logického čtverce v logice tříd. Subjekt-predikátový soud je složen ze dvou pojmů (podrobněji viz kapitola 3). V kapitole *Logika a jazyk* bylo řečeno, že klasická logika je extenzionální, protože pracuje pouze s extenzí výrazů. Extenzí pojmu (obecného jména) je množina všech těch individuí, o kterých se tento pojem vypovídá. Například: extenzi pojmu "pes" tedy představuje množina všech psů. A množiny se dají pěkně názorně nakreslit pomocí tzv. Vennových nebo Eulerových diagramů. Pojem je prostě a jednoduše ztotožněn s příslušnou množinou.

Eulerovy diagramy jsou starší a byly vytvořeny švýcarským matematikem Leobhardem Eulerem v 18. století právě pro přehledné zakreslování subjekt-predikátových soudů a sylogismů. Diagram je tvořen čtvercem (nebo obdélníkem), který znázorňuje univerzum (obsahuje všechna individua) a do něj se jako kruhy zakreslují množiny znázorňující příslušné pojmy. Nejjednodušší Eulerův diagram (pro jeden pojem) pak vypadá takto:



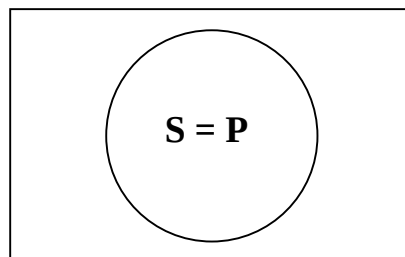
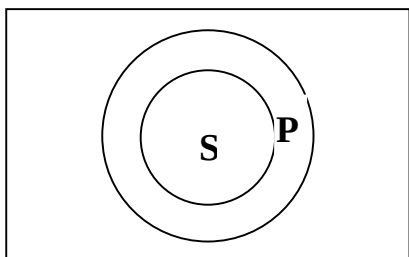
Všimněte, že daný pojem (v moderní terminologii predikát) vlastně dělí univerzum na dvě části: jednak na ta individua, o kterých se tento pojem vypovídá (množina A), a potom na ta, o kterých se nevypovídá (doplněk množiny A).

Subjekt-predikátový soud obsahuje dva pojmy: subjekt (S) a predikát (P). Do diagramu se oba dva zakreslují jako samostatné množiny. Vztah mezi těmito množinami je pak znázorněn polohou kruhů. Například diagram

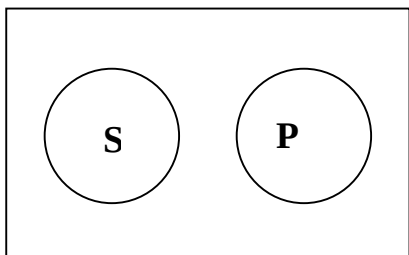


Zakresluje situaci, kdy extenze pojmu S (subjektu) je podmnožinou (částí) extenze pojmu P (predikátu). To znamená, že o každém individuu, o kterém se vypovídá pojem S, se vypovídá také pojem P, protože množina S je podmnožinou množiny P. Je to zakreslení obecného kladného soudu (SaP) – *Každé S je P*. Eulerovy diagramy pro jednotlivé typy soudů vypadají takto:

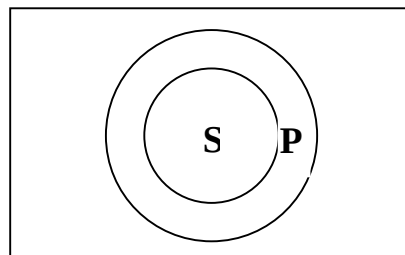
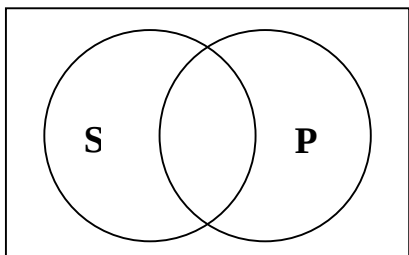
SaP



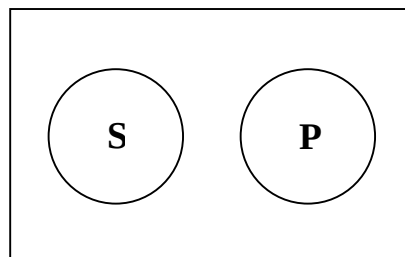
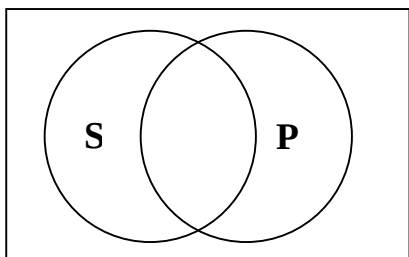
SeP



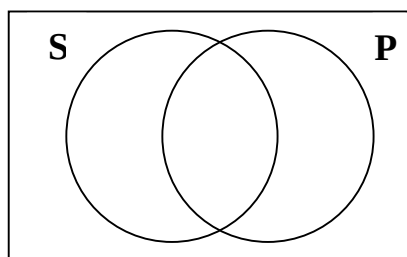
SiP



SoP

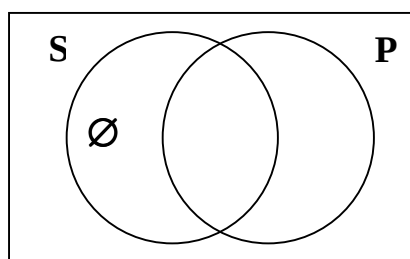


Vennovy diagramy vytvořené v 19. století anglickým logikem Johnem Vennem vycházejí z velice podobného principu – i tentokrát budeme používat obdélník pro znázornění univerza a kruhy pro zakreslení jednotlivých množin. Vztahy mezi množinami však tentokrát nejsou znázorněny jejich polohou. Vennův diagram se dvěma množinma vypadá stále stejně.

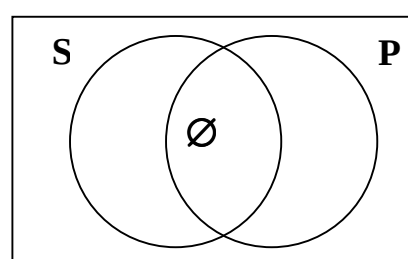


Do tohoto diagramu se potom zakresluje, která jeho část je prázdná ($\emptyset$) nebo naopak obsahuje nějaké prvky ($\bullet$). Plocha, která není označena ani jedním z těchto dvou znamének může, ale také nemusí obsahovat nějaké prvky (obě možnosti se připouštějí, ani jedna z nich není vyloučena). Diagramy pro jednotlivé typy soudů pak vypadají takto:

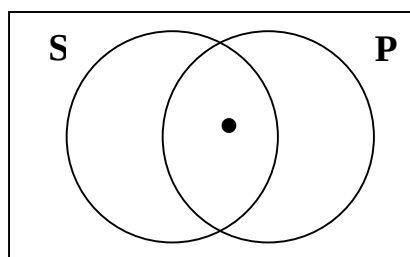
SaP



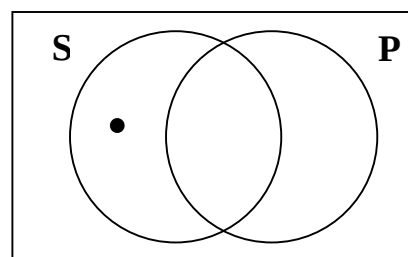
SeP



SiP



SoP



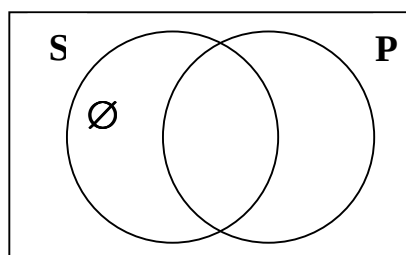
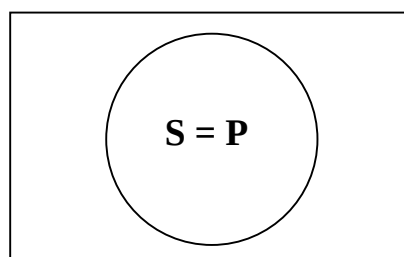
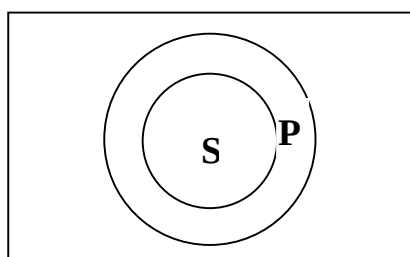
Z těchto obrázků pak jsou na první pohled patrné některé ze vztahů z logické čtverce:

Kontradikce: Kontradiktorické soudy tvrdí o téže ploše v diagramu jednou, že je prázdná (obecný soud) a po druhé, že obsahuje nějaké prvky (částečný soud).

Kontrárnost: Kdyby byly oba obecné soudy najednou pravdivé, musela by být množina pojmu S prázdná. Respektive, nebylo by žádné individuum, pro které by tyto soudy byly pravdivé. Všimněte, že v tomto případě vstupuje do hry předpoklad neprázdných termínů, který je pro sylogistiku typický (podrobněji viz kapitola 3)

Subkontrárnost: Podobně jako v předchozím případě platí, že kdyby byly oba částečné soudy nepravdivé, musel by být subjekt opět prázdným pojmem.

Všimněte, že následující diagramy (dva Eulerovy a jeden Vennův) zakreslují situaci, ve které je pravdivý obecný kladný soud SaP.



V Eulerových diagramech všechny nakreslené plochy obsahují nějaký prvek. Naopak ve Vennově diagramu jsou zakresleny i plochy, které žádný prvek neobsahují (je-li SaP pravdivý, nesmí S obsahovat žádný prvek, který není v P - plocha S je vně P prázdná) nebo plochy, které nějaké prvky obsahovat mohou, ale také nemusí (to, jestli P obsahuje nějaké další prvky mimo S nemá nejmenší vliv na to, že každé S je P). Díky tomu vystačíme s jediným Vennovým diagramem tam, kde Euler potřebuje diagramů více, aby mohl zakreslit všechny možnosti, za kterých je daný soud pravdivý. Vennovy diagramy jsou proto praktičtější. Na druhou stranu Eulerovy jsou přehlednější - na první pohled je patrné, v jakém vztahu dané množiny jsou.